ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 3 2015
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.925

А. Т. САЗОНОВА

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ В ПЛОСКОСТИ

*Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь,
e-mail: sazonova@mf.grsu.by*

Целью исследования данной работы является установление аналитических свойств решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей плоское движение четырех тел. Найдено 50 наборов значений констант межчастичного взаимодействия в задаче четырех тел в плоскости, при которых компоненты общего решения являются мероморфными функциями, а также 15 наборов, при которых соответствующие им системы имеют решения с подвижными критическими особенностями. Полученные результаты могут быть применены в аналитической теории дифференциальных уравнений, а также для решения ряда задач космической динамики.

Ключевые слова: движение четырех тел, константа взаимодействия, подвижные критические особенности, мероморфное решение.

A. T. SAZONOVA

ANALYTICAL PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF THE MOTION OF FOUR BODIES IN THE PLANE

*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno,Belarus,
e-mail: sazonova@mf.grsu.by*

The purpose of the study is to establish the analytical properties of solutions of nonlinear differential equations describing the planar motion of four bodies. 50 sets of constant values of interparticle interactions in the problem of four bodies in the plane are found, at which the components of the general solution are the meromorphic functions, as well as 15 sets, at which the corresponding systems have no Painlevé property. The results obtained can be applied in the analytic theory of differential equations, as well as for solving the problems of cosmic dynamics.

Keywords: motion of four bodies, the constant interaction, Painleve property, meromorphic solution.

Введение. Работы [1, 2, 3] посвящены исследованиям проблемы движения многих тел в плоскости, которая характеризуется следующими уравнениями движения:

$$\ddot{\vec{r}}_n = \omega\vec{k}\times\dot{\vec{r}}_n + 2\sum_{\substack{m=1;\\ m\neq n}}^{N}(\vec{r}_{nm})^{-2}(\alpha_{nm}+\alpha'_{nm}\vec{k}\times)\left[\dot{\vec{r}}_n(\dot{\vec{r}}_m\cdot\vec{r}_{nm})+\dot{\vec{r}}_m(\dot{\vec{r}}_n\cdot\vec{r}_{nm})-\vec{r}_{nm}(\dot{\vec{r}}_n\cdot\dot{\vec{r}}_m)\right],$$

где $m=\overline{1,N}$, $N>0$, $N\in Z$, векторы $\vec{r}_n\equiv\vec{r}_n(t)$ определяют позиции точек – частиц, движущихся в плоскости, которая для удобства записи представлена погруженной в трехмерное пространство таким образом, чтобы $\vec{r}_n\equiv(x_n,y_n,0)$.

Прежде всего, для удобства рассмотрения математической модели движения многих тел, физическая плоскость отождествляется с комплексной плоскостью. Тогда уравнения движения в плоскости становятся уравнениями движения N точек в комплексной z-плоскости:

$$\ddot{z}_n = i\omega\dot{z}_n + 2\sum_{\substack{m-1\\ m\neq n}}^{N} a_{nm}\frac{\dot{z}_n\dot{z}_m}{z_n-z_m},\quad n=1,\dots,N \tag{1}$$

с $a_{nm}=\alpha_{nm}+i\alpha'_{nm}$. Независимая переменная t вещественная и интерпретируется как «физическое время».

Введя замену независимой переменной [1–5] $z_n(t)=\xi(\tau),\ \tau=\dfrac{e^{i\omega t}-1}{i\omega}$, систему (1) перепишем в виде системы, состоящей из N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\xi_n''=2\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{N}a_{nm}\frac{\xi_n'\xi_m'}{\xi_n-\xi_m},\ n=1,\dots,N. \tag{2}$$

Зависимые переменные $\xi_n=\xi_n(\tau)$ являются комплексными. Константы межчастичного взаимодействия подчинены требованиям симметрии $a_{nm}=a_{mn}$.

Основная часть. В данной работе рассматривается задача о движении четырех тел в плоскости. Из исходной системы (2) видно, что центр масс $Z\equiv Z(\tau)$,

$$Z=\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4}{4},$$

движется равномерно:

$$Z''=0,$$
$$Z(\tau)=Z(0)+Z'(0)\tau=Z(0)+V\tau.$$

Положим

$$a_{12}=a_{21}=a,\ a_{13}=a_{31}=c,\ a_{14}=a_{41}=d,$$
$$a_{23}=a_{32}=b,\ a_{24}=a_{42}=e,\ a_{34}=a_{43}=f.$$

Введем координаты относительно центра масс $u_n=\varsigma_n-Z,\ n=1,\ 2,\ 3,\ 4$, при этом выполняются условия

$$u_1+u_2+u_3+u_4=0.$$

Для удобства обозначений положим

$$u_1=x,\ u_2=y,\ u_3=z,\ u_4=-x-y-z.$$

С помощью несложных алгебраических преобразований можно теперь записать уравнения движения в терминах переменных *x, y, z*:

$$\begin{cases}\ddot x=2a\dfrac{(\dot x+V)(\dot y+V)}{x-y}+2c\dfrac{(\dot x+V)(\dot z+V)}{x-z}-2d\dfrac{(\dot x+V)(\dot x+\dot y+\dot z-V)}{2x+y+z},\\[2mm] \ddot y=-2a\dfrac{(\dot x+V)(\dot y+V)}{x-y}+2b\dfrac{(\dot y+V)(\dot z+V)}{y-z}-2e\dfrac{(\dot y+V)(\dot x+\dot y+\dot z-V)}{x+2y+z},\\[2mm] \ddot z=-2c\dfrac{(\dot x+V)(\dot z+V)}{x-z}-2b\dfrac{(\dot y+V)(\dot z+V)}{y-z}-2f\dfrac{(\dot z+V)(\dot x+\dot y+\dot z-V)}{x+y+2z},\end{cases} \tag{3}$$

где $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t=\tau-\tau_0,\ V=Z'(0).$

Целью исследования данной работы является установление наборов значений констант взаимодействия, при которых все решения соответствующих им систем являются мероморфными функциями.

Путем замены $x=x,\ y=y,\ z=z,\ t=\varepsilon t,\ \varepsilon-$ параметр, находим упрощенную для (3) систему вида

$$\begin{cases}\ddot x=2a\dfrac{\dot x\dot y}{x-y}+2c\dfrac{\dot x\dot z}{x-z}-2d\dfrac{\dot x(\dot x+\dot y+\dot z)}{2x+y+z},\\[2mm] \ddot y=-2a\dfrac{\dot x\dot y}{x-y}+2b\dfrac{\dot y\dot z}{y-z}-2e\dfrac{\dot y(\dot x+\dot y+\dot z)}{x+2y+z},\\[2mm] \ddot z=-2c\dfrac{\dot x\dot z}{x-z}-2b\dfrac{\dot y\dot z}{y-z}-2f\dfrac{\dot z(\dot x+\dot y+\dot z)}{x+y+2z}.\end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что если система (4) имеет решения с подвижными критическими особенностями, то и исследуемая система (3) также будет иметь решения с подвижными критическими особенностями.

Согласно [2], справедливо утверждение: «Для наличия у системы (3) мероморфного решения необходимо, чтобы все показатели γ_n, β_n, Γ, $n = \overline{1,6}$, определяемые через константы a, b, c, d, e, f с помощью соотношений

$$\Gamma = \frac{2}{2+a+b+c+d+e+f},$$

$$\beta_n = -2a_n,$$

$$\gamma_n = \frac{1}{1+a_n},$$

$$a_n \in \{a, b, c, d, e, f\},$$

принимали целочисленные или бесконечные значения».

Нетрудно выделить все значения констант взаимодействия, принадлежащие к определенной выше категории (таблица) [6].

Наборы значений констант взаимодействия *a, b, c, d, e, f*

Значения констант взаимодействия							Значения констант взаимодействия						
№	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	№	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	2	−2	0	0	0	0	**72**	−1	0	0	0	0	−2
2	−2	−1	−1	0	0	0	**73**	−1	0	0	0	0	−1,5
3	−2	−1	0	0	0	0	**74**	−1	0	0	0	0	−1
4	−2	0	−2	0	0	0	**75**	−1	0	0	0	0	0
5	−2	0	−1	0	0	0	**76**	−0,5	−1,5	−0,5	−0,5	0	0
6	−2	0	0	0	0	−2	**77**	−0,5	−1	−0,5	−0,5	0	0
7	−2	0	0	0	0	−1	**78**	−0,5	−1	0	−0,5	−1	−1
8	−2	0	0	0	0	0	**79**	−0,5	−0,5	−1,5	0	−0,5	0
9	−1,5	−1,5	−1	0	0	0	**80**	−0,5	−0,5	−1	0	−0,5	0
10	−1,5	−1,5	0	0	0	0	**81**	−0,5	−0,5	−0,5	−0,5	−0,5	−0,5
11	−1,5	−1	−1,5	0	0	0	**82**	−0,5	−0,5	−0,5	−0,5	−0,5	0
12	−1,5	−1	0	0	0	0	**83**	−0,5	−0,5	−0,5	−0,5	0	−0,5
13	−1,5	−0,5	−0,5	0	0	−0,5	**84**	−0,5	−0,5	−0,5	0	−0,5	−0,5
14	−1,5	0	−1,5	0	0	0	**85**	−0,5	−0,5	0	−0,5	−1	−1,5
15	−1,5	0	−1	0	0	0	**86**	−0,5	−0,5	0	−0,5	−0,5	−2
16	−1,5	0	0	0	0	−1,5	**87**	−0,5	−0,5	0	−0,5	−0,5	−1
17	−1,5	0	0	0	0	−1	**88**	−0,5	−0,5	0	−0,5	−0,5	−0,5
18	−1,5	0	0	0	0	0	**89**	−0,5	−0,5	0	−0,5	0	−0,5
19	−1	−2	−1	0	0	0	**90**	−0,5	−0,5	0	0	−0,5	−1
20	−1	−2	0	0	0	0	**91**	−0,5	−0,5	0	0	−0,5	0
21	−1	−1,5	−1,5	0	0	0	**92**	−0,5	0	−0,5	−0,5	−2	−0,5
22	−1	−1,5	0	0	0	0	**93**	−0,5	0	−0,5	−0,5	−1	0
23	−1	−1	−2	0	0	0	**94**	−0,5	0	−0,5	−0,5	−0,5	−2
24	−1	−1	−1	0	0	0	**95**	−0,5	0	−0,5	−0,5	−0,5	−1
25	−1	−1	0	0	0	0	**96**	−0,5	0	−0,5	−0,5	−0,5	−0,5
26	−1	−0,5	−0,5	0	0	−0,5	**97**	−0,5	0	−0,5	−0,5	0	−1
27	−1	0	−2	0	0	0	**98**	−0,5	0	−0,5	−0,5	0	0
28	−1	0	−1,5	0	0	0	**99**	−0,5	0	−0,5	0	−0,5	−0,5
29	−1	0	−1	0	0	0	**100**	−0,5	0	0	−1	−1,5	0

Значения констант взаимодействия							Значения констант взаимодействия						
№	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	№	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***
30	−1	0	0	−1	−1	−1	**101**	−0,5	0	0	−0,5	−1	−2
31	−0,5	0	0	−0,5	−1	−1	**102**	0	0	−1,5	0	−1	0
32	−0,5	0	0	−0,5	−0,5	−0,5	**103**	0	0	−1,5	0	0	0
33	−0,5	0	0	−0,5	−0,5	−1	**104**	0	0	−1	0	−2	0
34	−0,5	0	0	−0,5	−0,5	−0,5	**105**	0	0	−1	0	−1,5	0
35	−0,5	0	0	−0,5	0	−2	**106**	0	0	−1	0	−1	0
36	−0,5	0	0	−0,5	0	−1,5	**107**	0	0	−1	0	0	0
37	−0,5	0	0	−0,5	0	−1	**108**	0	0	−0,5	−0,5	−2	0
38	−0,5	0	0	0	−0,5	−2	**109**	0	0	−0,5	−0,5	−1,5	0
39	−0,5	0	0	0	−0,5	−1,5	**110**	0	0	−0,5	−0,5	−1	−2
40	−0,5	0	0	0	−0,5	−1	**111**	0	0	−0,5	−0,5	−1	0
41	0	−2	−2	0	0	0	**112**	0	0	−0,5	−0,5	−0,5	−0,5
42	0	−2	0	−2	0	0	**113**	0	0	−0,5	0	−2	−0,5
43	0	−2	0	−1	0	0	**114**	0	0	0	−2	−0,5	−0,5
44	0	−2	0	0	0	0	**115**	0	0	0	−2	0	0
45	0	−1,5	−1,5	0	0	0	**116**	0	0	0	−1,5	−1,5	0
46	0	−1,5	−1	0	0	0	**117**	0	0	0	−1,5	0	−1,5
47	0	−1,5	0	−1,5	0	0	**118**	0	0	0	−1,5	0	0
48	0	−1,5	0	−1	0	0	**119**	0	0	0	−1	−2	0
49	0	−1,5	0	0	0	0	**120**	0	0	0	−1	−1	−2
50	0	−1	−2	0	0	0	**121**	0	0	0	−1	−1	−1
51	0	−1	−1,5	0	0	0	**122**	0	0	0	−1	−1	0
52	0	−1	−1	0	0	0	**123**	0	0	0	−1	0	−2
53	0	−1	0	−2	0	0	**124**	0	0	0	−1	0	−1
54	0	−1	0	−1,5	0	0	**125**	0	0	0	−0,5	−2	−0,5
55	0	−1	0	−1	−1	−1	**126**	0	0	0	−0,5	−1	−1
56	0	−1	0	−1	0	0	**127**	0	0	0	−0,5	−0,5	−2
57	0	−1	0	0	0	0	**128**	0	0	0	−0,5	−0,5	−1,5
58	0	−0,5	−0,5	0	0	−0,5	**129**	0	0	0	−0,5	−0,5	−1
59	0	−0,5	0	−2	−0,5	0	**130**	0	0	0	−0,5	−0,5	−0,5
60	0	−0,5	0	−2	0	−0,5	**131**	0	0	0	0	−2	0
61	0	−0,5	0	−0,5	−0,5	−1	**132**	0	0	0	0	−1,5	−1,5
62	0	−0,5	0	−0,5	−0,5	−0,5	**133**	0	0	0	0	−1,5	0
63	0	−0,5	0	0	−1	−1,5	**134**	0	0	0	0	−1	−2
64	0	0	−2	0	−2	0	**135**	0	0	0	0	−1	−1
65	0	0	−2	0	−1	0	**136**	0	0	0	0	−1	0
66	0	0	−2	0	0	0	**137**	0	0	0	0	0	−2
67	0	0	−1,5	0	−1,5	0	**138**	0	0	0	0	0	−1,5
68	0	0	0	0	0	−1	**139**	0	−0,5	−0,5	0	0	0
69	0	0	0	0	0	0	**140**	−0,5	0	0	−0,5	0	0
70	−0,5	−0,5	0	0	0	0	**141**	0	−0,5	0	−0,5	0	0
71	−0,5	0	−0,5	0	0	0	**142**	−0,5	0	0	0	−0,5	0

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что случаи с номерами 70, 71, 139−142 ранее были рассмотрены в работе [6]. Данные наборы значений констант соответствуют системам, все решения которых являются мероморфными функциями.

Рассмотрим теперь случай 69, когда $a = b = c = d = e = f = 0$. Тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = 0, \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

и будет иметь общее решение вида

$$x = A_1 t + A_0,\ y = B_1 t + B_0,\ z = C_1 t + C_0,$$

где $C_0, C_1, B_0, B_1, A_1, A_0$ – произвольные постоянные.

Пусть теперь выполняется условие $a \neq 0$, $b = c = d = e = f = 0$. Система (3) будет иметь вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y}, \\ \ddot{y} = -2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y}, \\ \ddot{z} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где, что легко заметить, $\ddot{x} + \ddot{y} = 0$, значит, $x + y = C_1 t + C_0$. Выражая y из последнего соотношения и подставляя в первое уравнение системы (5) находим

$$\ddot{x} = 2a\frac{(\dot{x}+V)(C_1+V-\dot{x})}{2x - C_1 t - C_0}.$$

Заменой $u = 2x - C_1 t - C_0$ последнее уравнение приводим к виду $u'' = -a\dfrac{u'^2}{u} + a\dfrac{(C_1+2V)^2}{u}$.

При $u = w^{-1}$ последнее уравнение принимает вид

$$w'' = (2+a)\frac{w'^2}{w} + (2V + C_1)aw^3. \tag{6}$$

В соответствии с результатами, полученными в работе [7], заключаем, что при $a = -2$, $a = -1{,}5$, $a = -1$ все решения уравнения (6) являются мероморфными функциями. Аналогичными рассуждениями, выражая x из уравнения $x + y = C_1 t + C_0$ и подставляя во второе уравнение системы (5), приходим к уравнению вида (6), все решения которого являются мероморфными функциями. Для компоненты z системы (5) будем иметь общее решение, записанное в виде линейной функции $z = A_1 t + A_0$; A_1, A_0 –произвольные постоянные. Таким образом, имеем, что все компоненты общего решения системы (5) являются мероморфными функциями.

Следовательно, в случаях 8, 18, 75 из таблицы все решения систем, соответствующих данным наборам, являются мероморфными функциями.

При $b \neq 0$, $a = c = d = e = f = 0$ получим систему, которую легко привести к виду (5) путем замены $y = x$, $z = y$, $x = z$. Таким образом, заключаем, что в случаях 44, 49 и 57 будем иметь системы, все решения которых являются мероморфными функциями. Аналогично для наборов 66, 103, 107, когда $c \neq 0$, $a = b = d = e = f = 0$, делаем вывод, что все решения полученных систем являются мероморфными функциями.

Пусть теперь $d \neq 0$, $a = b = c = e = f = 0$. Аналогичными рассуждениями приходим к уравнению вида (6). Заметим также, что системы, соответствующие наборам, когда $e \neq 0$, $a = b = c = d = f = 0$ и $f \neq 0$, $a = b = c = d = e = 0$ также легко привести к уравнению вида (6). Таким образом, все решения систем, соответствующих наборам 68, 115, 118, 131, 133, 136, 137, 138, являются мероморфными функциями.

Рассмотрим случаи из таблицы, когда $a \neq 0,\ f \neq 0,\ b = c = d = e = 0$. Тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y}, \\ \ddot{y} = -2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y}, \\ \ddot{z} = -2f\dfrac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{x+y+2z}. \end{cases} \tag{7}$$

Легко заметить, что $\ddot{x}+\ddot{y}=0$, значит, $x+y=C_1t+C_0$, где C_0, C_1 – произвольные постоянные. Следовательно, последнее уравнение системы (7) примет вид

$$\ddot{z} = -2f\frac{(\dot{z}+V)(\dot{z}+C_1-V)}{2z+C_1t+C_0}.$$

Заменой $u = 2z+C_1t+C_0$ последнее уравнение приводим к виду

$$u'' = -f\frac{u'^2}{u} + f\frac{(C_1-2V)^2}{u}. \tag{8}$$

При $u = w^{-1}$ последнее уравнение принимает вид (6). В соответствии с [7] заключаем, что при $f=-2,\ f=-1{,}5,\ f=-1$ все решения уравнения (8) являются мероморфными функциями. Следовательно, компонента z общего решения системы (7) является мероморфной функцией. Аналогичными рассуждениями, как и в случае 8, 18, 75, приходим к выводу, что компоненты x, y общего решения системы (7) также являются мероморфными функциями. Таким образом, заключаем, что в случаях 6, 7, 16, 17, 72, 73, 74 из таблицы все решения соответствующих им систем являются мероморфными функциями.

Заметим также, что системы, соответствующие наборам, когда $b \neq 0,\ d \neq 0,\ a = c = e = f = 0$ и $c \neq 0,\ e \neq 0,\ a = b = d = f = 0$, также легко привести к уравнениям вида (8). Таким образом, все решения систем, соответствующих наборам 42, 43, 47, 48, 53, 54, 56, 64, 65, 67, 102, 104, 105, 106, являются мероморфными функциями.

Рассмотрим случаи, когда $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = d = e = f = 0$, тогда система (4) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a\dfrac{\dot{x}\dot{y}}{x-y}, \\ \ddot{y} = -2a\dfrac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} + 2b\dfrac{\dot{y}\dot{z}}{y-z}, \\ \ddot{z} = -2b\dfrac{\dot{y}\dot{z}}{y-z}. \end{cases} \tag{9}$$

Будем исследовать систему (9) с помощью метода резонансов [7]. Воспользуемся равенством $\ddot{x}+\ddot{y}+\ddot{z}=0$ (которое очевидно следует из системы (9)). Посредством замены

$$x = \alpha t^{-s},\ y = \beta t^{-s},\ z = \gamma t^{-s},$$

находим соотношения для коэффициентов

$$a+b = -\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{s}\right),\ \alpha = \left(\frac{2as}{s+1}+1\right)\beta,\ \gamma = \left(\frac{2bs}{s+1}+1\right)\beta,\ s \neq -1. \tag{10}$$

З а м е ч а н и е 2. При замене $x = \alpha t,\ y = \beta t,\ z = \gamma t\ (s=-1)$ из системы (9) получаем соотношения $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$, откуда следуют равенства $a = b = 0$, что противоречит допущению.

При $a=b=-2$ из первого соотношения системы (10) находим $s=\frac{3}{5}$. Таким образом, система, соответствующая набору значений 1 из таблицы, будет иметь решения с подвижными критическими особенностями.

При $a=-2,\ b=-1;\ a=b=-1{,}5;\ a=-1,\ b=-2$ аналогично будем иметь $s=1$. Таким образом, решение системы (9) с учетом равенств (10) будем искать в виде

$$x=\alpha t^{-1}+\ldots+h_1 t^{r-1}+\ldots,\ y=\beta t^{-1}+\ldots+h_2 t^{r-1}+\ldots,\ z=\gamma t^{-1}+\ldots+h_3 t^{r-1}+\ldots,$$

где $b=-a-3,\ \frac{\gamma}{\beta}=-a-2,\ \frac{\alpha}{\beta}=a+1$. Тогда для резонансов r [7] получим уравнение

$$r(r+1)\left(r^2-r+\frac{6(a+1)(a+2)}{a(a+3)}\right)=0.$$

Решая последнее уравнение, находим, что при $a=-1,\ r_{1,2}=0,\ r_3=-1,\ r_4=1$, при $a=-2,\ r_{1,2}=0,\ r_3=-1,\ r_4=1$, а при $a=-1{,}5,\ r_1=0,\ r_2=-1,\ r_3=\frac{3+i\sqrt{15}}{6},\ r_4=\frac{3-i\sqrt{15}}{6}$. Таким образом, заключаем, что в случаях 3, 20 из таблицы все решения соответствующих им систем являются мероморфными функциями, а в случае 10 соответствующая система имеет подвижные критические особенности.

При $a=-1{,}5,\ b=-1;\ a=-1,\ b=-1{,}5$ будем иметь $s=\frac{3}{2}$. Таким образом, системы, соответствующие наборам значений 1, 22 из таблицы, будут иметь решения с подвижными критическими особенностями.

При $a=-1,\ b=-1$ будем иметь $s=3$. Таким образом, решение системы (9) будем искать в виде $x=\alpha t^{-3}+\ldots+h_1 t^{r-3}+\ldots,\ y=\beta t^{-3}+\ldots+h_2 t^{r-3}+\ldots,\ z=\gamma t^{-3}+\ldots+h_3 t^{r-3}+\ldots$. Тогда для резонансов r получим уравнение

$$r(r+1)(r^2-3r+4)=0,\ \text{откуда}\ r_1=0,\ r_2=-1,\ r_3=\frac{3+i\sqrt{7}}{2},\ r_4=\frac{3-i\sqrt{7}}{2}.$$

Таким образом, заключаем, что в случае 25 соответствующая ему система имеет подвижные критические особенности [7].

В случаях $b\neq 0,\ c\neq 0,\ a=d=e=f=0;\ a\neq 0,\ c\neq 0,\ b=d=e=f=0$ будем иметь системы, которые легко привести к виду системы (9) путем введения замен $x=x,\ z=y,\ y=-z$ и $x=y,\ y=-x,\ z=z$ соответственно.

Следовательно, справедлива

Т е о р е м а. *Если* $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ *принимают значения наборов с номерами* 1, 4, 10, 12, 14, 15, 22, 25, 28, 29, 41, 45, 46, 51, 52 *из таблицы, то система* (3) *имеет решения с подвижными критическими особенностями, а значениям* 3, 5, 6–8, 16–18, 20, 27, 42–44, 47–49, 50, 53, 54, 56, 57, 64–75, 102–107, 115, 118, 131, 133, 136–142 *соответствуют системы, все решения которых являются мероморфными функциями*.

З а м е ч а н и е 3. Оставшиеся случаи из таблицы также были исследованы автором. Однако, в силу ограниченности объема статьи, возникла необходимость привести их исследования позднее. Среди них выделены 77 наборов констант, при которых соответствующие им системы имеют решения с подвижными критическими особенностями.

Заключение. Найдены необходимые условия наличия мероморфных решений у системы нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка (3), описывающей плоское движение четырех тел (см. таблицу).

Установлено, что 15 систем трех нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих плоское движение четырех тел, имеют решения с подвижными критическими особенностями.

Рассмотрено 50 наборов значений констант взаимодействия, при которых все решения соответствующих им систем являются мероморфными функциями.

Важность полученного результата заключается в возможности описания траекторий проблемы плоского движения четырех тел при указанных наборах значений констант межчастичного взаимодействия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14М−148).

Список использованной литературы

1. *Calogero, F.* Classical Many-Body Problems amenable to exact treatments: lect. Notes in Phys. Monograph / F. Calogero. – Berlin: Springer, 2001.

2. *Calogero, F.* Periodic solutions of a many-rotator problem in the plane / F. Calogero, J.-P. Françoise // Inverse Problems. – 2001. – Vol. 17. – P. 1–8.

3. *Calogero, F.* Periodic solutions of a many-rotator problem in the plane. II. Analysis of various motions / F. Calogero, J.-P. Françoise, M. Sommacal // J. Nonlinear Math. Phys. – 2003. – Vol. 10. – P. 157–214.

4. *Calogero, F.* Integrable and solvable many-body problems in the plane via complexification / F. Calogero // J. Math. Phys. – 1998. – Vol. 39. – P. 5268–5291.

5. *Calogero, F.* Motion of poles and zeros of special solutions of nonlinear and linear partial differential equations and related «Solvable» Many-Body Problems» / F. Calogero // Nuovo Cimento. – 1978. – Vol. 43 B. – P. 177–241.

6. *Сазонова, А. Т.* Разрешимые случаи в задаче четырех тел / А. Т. Сазонова // Весн. Годзен. дзярж. ун-та им. Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. − 2014. − № 3 (180). – С. 45–53.

7. *Мартынов, И. П.* Аналитическая теория нелинейных уравнений и систем: пособие / И. П. Мартынов, Н. С. Березкина, В. А. Пронько. – Гродно: ГрГУ, 2009.

Поступила в редакцию 17.08.2015